I Vibrations monochromatiques   forme g^{ale} $A\cos(\omega t-\phi)$

A)

1) $V(t) = 3\cos(12\pi t)$

amplitude $A=3$

fréquence $2\pi f = 12\pi \Rightarrow f = 6\ \mathrm{Hz}$

période $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{6}\ \mathrm{s}$

retard de phase $\phi = 0$ (radian et/ou degré)

2) $V(t) = -5\cos(6\pi t - \pi/4)$

$= 5\cos(6\pi t + \frac{3\pi}{4})$

$= 5\cos(6\pi t - \frac{5\pi}{4})$

amplitude $A=5$

fréquence $f = 3\ \mathrm{Hz}$

période $T = \frac{1}{3} = 0{,}33\ \mathrm{s}$

retard de phase $\phi = \frac{5\pi}{4}\ \mathrm{rad} = 225°$

3) $V(t) = 5\sin(6t-10)$

$= 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - (6t-10)\right)$

$= 5\cos\left(-6t + \frac{\pi}{2} + 10\right)$

$= 5\cos\left(6t - \frac{\pi}{2} - 10\right)$

amplitude $A = 5$

fréquence $f = \frac{3}{\pi}\ \mathrm{Hz}$

période $T = 1{,}05\ \mathrm{s}$

retard de phase $\phi = \left(\frac{\pi}{2} + 10\right)\mathrm{rad} = 302{,}96°$

B) Expressions complexes

$V(t) = 3\cos(12\pi t) \Rightarrow \underline{V}(t) = 3e^{-i(12\pi t)}$

$\dfrac{d\underline{V}(t)}{dt} = -36i\pi e^{-i12\pi t} = -12i\pi \underline{V}$

$V(t) = 5\cos(6\pi t - \frac{5\pi}{4}) \Rightarrow \underline{V}(t) = 5e^{-i(6\pi t - \frac{5\pi}{4})} = 5e^{i\frac{5\pi}{4}}e^{-i(6\pi t)}$

$\dfrac{d\underline{V}(t)}{dt} = 5e^{i\frac{5\pi}{4}}e^{-i(6\pi t)} \times -6i\pi = -6i\pi\underline{V}$

$V(t) = 5\cos(6t - \frac{\pi}{2} - 10) \Rightarrow \underline{V}(t) = 5e^{-i(6t-\frac{\pi}{2}-10)}$

$\dfrac{d\underline{V}(t)}{dt} = -6i\,\underline{V}(t)$

II Onde scalaire monochromatique plane

$$\Psi(\vec{r},t) = A\,e^{-i(\omega t - \phi(\vec{r}))}$$

1) Paramètres utilisés

Amplitude A

Pulsation ω

retard de phase $\phi(\vec{r})$

fréquence f : $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$

2) $\phi(\vec{r}) = 3x + 4y + 5z \Rightarrow$ surfaces d'ondes

$= \vec{k}\cdot\vec{r}$

avec $\vec{k}\begin{vmatrix}3\\4\\5\end{vmatrix}$ $\vec{r}\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ $\quad \vec{k}$ = vecteur d'onde tel que $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{u}$ ← direction unitaire, v ← vitesse de propag

$\phi(\vec{r})$ eq d'un plan $\Rightarrow$ surface d'onde plane

3) $\Psi(\vec{r},t)$ satisfait à l'équation de propagation

$$\Delta\Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \qquad \Delta\Psi \text{ Laplacien de } \Psi$$

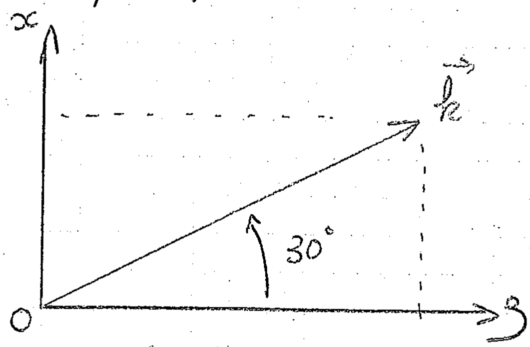
ici $$\Delta\Psi = \Delta\left(A e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A e^{-i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A e^{-i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(A e^{-i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))}\right)$$
$$= \left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2\right) A e^{-i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))} = -k^2\Psi$$

ici $$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) = (-i\omega)^2\Psi = -\omega^2\Psi$$

soit $$\Psi = -\frac{1}{k^2}\Delta\Psi = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta\Psi = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\ ; \quad v = \frac{\omega}{k}$$

vitesse de phase.

4) Propagation normale à Oy et faisant $\theta = 30°$ avec Oz.



$$\vec{k}\left|\begin{array}{l}\frac{k}{2}\\ 0\\ \frac{k\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Psi(\vec{r},t) = A\,e^{-i\left(\omega t - \frac{kx}{2} - \frac{k\sqrt{3}}{2}z\right)} \qquad \text{avec } k = \sqrt{3^2+4^2+5^2} \simeq 7\,m^{-1}$$

$$= A\,e^{-i\left(\omega t - \frac{7x}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

5) $z = z_1$ surface d'onde.

$\vec{u}\left|\begin{array}{l}0\\0\\1\end{array}\right.$ vecteur unitaire donnant la direction de propagation.

$$\phi_1(\vec{r}) = \vec{k}\cdot\vec{r}_1 = k z_1 \Rightarrow \Psi_1(\vec{r},t) = A\,e^{-i(\omega t - k z_1)}$$

$$\phi_2(\vec{r}) = k z_2 \Rightarrow \Psi_2(\vec{r},t) = A\,e^{-i(\omega t - k z_2)}$$

indice

Différence de phase $\Phi = \phi_2 - \phi_1 = k(z_2 - z_1) = \frac{2\pi n}{\lambda_0} d$

car $\lambda_0 = \cancel{n}\,2\pi\frac{v}{\omega} = \frac{n v}{f}$ et $k = \frac{\omega}{v}$ $\Rightarrow \lambda_0 = \frac{2\pi n}{k}$

III

L'onde acoustique qui se propage dans le pavillon a pour expression

$$\Psi = A\exp\left(-\frac{\alpha x}{2}\right)\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x}{v_\varphi}\right)\right] \quad \text{où} \quad v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2/c_s^2-\alpha^2/4} = \frac{c_s^2}{1-\omega_c^2/\omega^2}$$

avec $\omega_c = \alpha c_s/2$. La vitesse de phase dans le pavillon est donc : $v_\varphi = c_s/(1-\omega_c^2/\omega^2)^{1/2}$. On en déduit la vitesse de groupe $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{\alpha^2}{4} \quad \text{donne en différentiant} \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c_s^2\frac{k}{\omega} = c_s\left(1-\frac{\alpha^2 c_s^2}{4\omega^2}\right)^{1/2} = c_s\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

On en déduit la relation : $v_\varphi v_g = c_s^2$.